**线性方程组消元解法**

**消元解法**

1） 2x + 3y = 8

2 ）x + 2y = 5

解

(2x + 3y) - 2(x + 2y) = -y = 8 - 10 = -2

将y带入1得x = 1，y = 2

我们将这种解法消元解法

**增广矩阵**

如下线性方程组

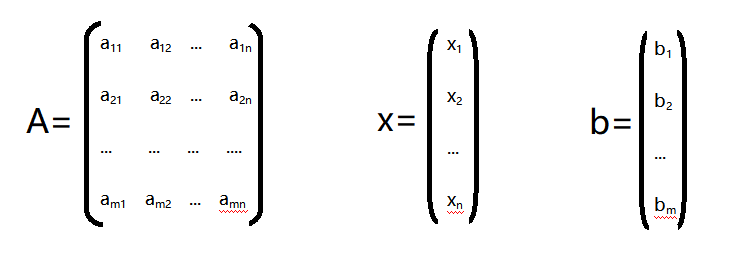
a11x1 + a12x2 + ... + a1nxn = b1

a21x1 + a22x2 + ... + a2nxn = b2

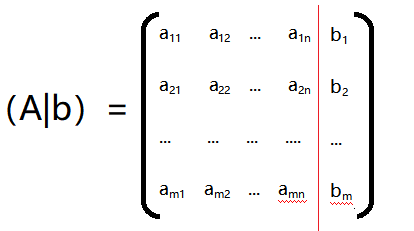
... ... ... ....

am1x1 + am2x2 + ... + amnxn = bm

我们可构建矩阵如下矩阵，Ax = b



我们把由A和b组成的矩阵称为增广矩阵，如下



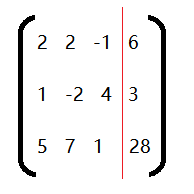
如下，我们用增广矩阵解线性方程组

2x1 + 2x2 - x3 = 6

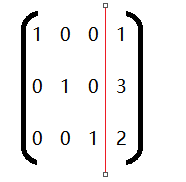
x1 + 2x2 + 4x3 = 3

5x1 + 7x2 + x3 = 28

增广矩阵为



我们利用初等变换对矩阵的行进行变换，如下

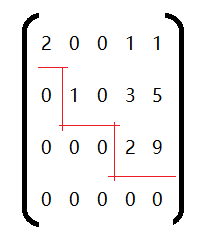


解得：x1 = 1，x2 = 3，x3 = 2

实际上消元解法的过程就是初等变换的过程

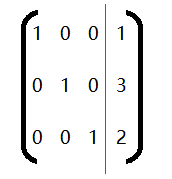
**阶梯形矩阵**

我们称如下形式的矩阵称为阶梯形矩阵



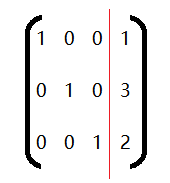
其具有阶梯形状

阶梯形矩阵中，每行开头的元素是1，且它所在的列其他元素为0，则称简化的阶梯形矩阵，如下便是一个简化的阶梯形矩阵



**增广矩阵与线性方程组**

增广矩阵实际上就是线性方程组，如下增广矩阵



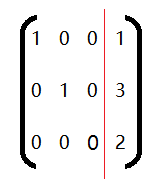
其线性方程组为

1. 1\*x1 + 0\*x2 + 0\*x3 = 1
2. 0\*x1 + 1\*x2 + 0\*x3 = 3
3. 0\*x1 + 0\*x2 + 1\*x3 = 2

我们的增广矩阵通过初等变换转为其他矩阵实际上就是线性方程组1，2，3之间的相加减或者某个方程式的左右2边同乘k倍

**无解的增广矩阵**

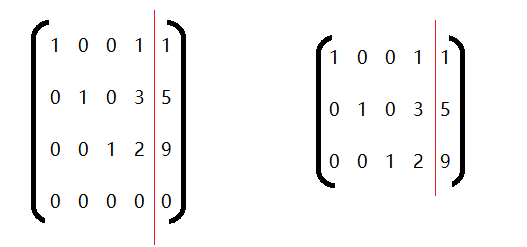
如下矩阵



第3行，不存在 0\*x1 + 0\*x2 + 0\*x3 = 2 ，所以该方程组无解

**无穷多解的增广矩阵**

如下矩阵，其第4行第4个元素为0，所以无法消去1到3行第4个的元素，其左边的矩阵等价于右边的矩阵



其对应的方程组为

1. 1\*x1 + 0\*x2 + 0\*x3 + 1x4 = 1
2. 0\*x1 + 1\*x2 + 0\*x3 + 3x4 = 5
3. 0\*x1 + 0\*x2 + 1\*x3 + 2x4 = 9

所以方程组的解为

x1 = 1 - x4

x2 = 5 - 3x4

x3 = 9 - 2x4

x4 = c

当x4等于某个数值c是，我们带入x4去求x123

此时方程组有无穷多解

**定理：当 r(A, b) = r(A) 时，方程组有解，当r(Amxn, b) = n 时方程组有唯一解，当r(Amxn, b) < n 时，方程组有无穷多解**

这个定理在上面2小节中以说明

r(A)时秩，详情请查看矩阵章节

值得一提的是r(Amxn) = min(m, n)，也就是说如果 m < n，方程组不可能有唯一解

**定理：齐次线性方程组有非0解的充分必要条件是 r(A) < n**

如果齐次线性方程组的 r(Amxn) = n，那么其有唯一解，我们说齐次线性方程组必有0解，则其唯一解就是0解，当r(A) < n时，其会有无穷解，也就有非0解

**向量与向量组的线性组合**

**向量**

只有一行或一列的矩阵我们称为向量，使用小写字母黑体**a b c u v x y** 等表示

如下：

**a** = (a1, a2, ... an)

**b** = (b1, b2, ... bn)T

我们称a为n维向量（因为其有n个元素）

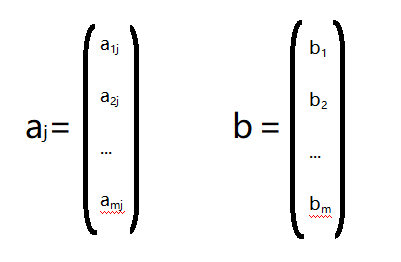
向量中的元素，我们叫做**分量**

分量的元素全为0我们称为0向量，记作 **0**

**0** = (0, 0, ... 0)

**向量的线性组合**

如果存在n个向量aj，和1个向量b



有一组值k1，k2，k3，... kn 使得如下等式成立

k1**a1** + k2**a2** + ... kn**an** = b

则我们称**b**时**a1, a2, .. an** 的**线性组合**，或者说向量b可由向量**a1, a2, .. an** 线性表示

**定理：向量b可由向量a1, a2, .. an 线性表示的充分必要条件是，r(a1, a2, .. an) = r(a1, a2, .. an, b)**

**a1, a2, .. an, b** 可组成一个增广矩阵，当**r(a1, a2, .. an) = r(a1, a2, .. an, b)**时方程组有解，则向量b可由向量**a1, a2, .. an** 线性表示

**定理：如果向量组（A）可由向量组（B）线性表示，向量组（B）可由向量组（C）线性表示，则向量组（A）可由向量组（C）线性表示**

矩阵就是一组向量，上面的意思是，矩阵A中的每一列都存在一组数k1, k2, ... kn，使得A中的每一列都可由向量组（B）线性表示，同理其他

**向量组等价**

如果存在一组向量（A）和一组向量（B），A中的每一列可由向量组（B）线性表示，B中的每一列可由向量组（A）线性表示，则称向量组（A）和向量组（B）等价

**向量组的线性相关性**

齐次线性方程组可以表示成 **a1, a2, .. an** 与向量**0**之间的关系

**线性相关与线性无关**

如下等式

k1**a1** + k2**a2** + ... kn**an** = **0**

如果存在一组不全为0的数k1，k2，k3，... kn使得等式成立，也就是说，线性方程组存在不全为0的解，则我们称 **a1, a2, .. an 线性相关**

如果只存在k1，k2，k3，... kn都为0才能使等式成立，也就是说只有0解，则我们称 **a1, a2, .. an 线性无关**

**定理：由a1, a2, .. an为列向量组成的矩阵的秩小于n时，a1, a2, .. an线性相关，如果其秩等于n时，a1, a2, .. an线性无关**

定理每什么好说的，矩阵的秩小于n，齐次线性方程组有无穷解，矩阵的秩等于n，齐次线性方程组仅有0解

**推论：有n个n维向量a1, a2, .. an其线性相关的充分必要条件是由其向量组成的行列式|A|不等于0**

克莱姆法则的定理，如果齐次线性方程组的系数行列式D不等于0，那么它仅有0解

**推论：由n个m维向量a1, a2, .. an如果m<n，则其线性相关**

没什么好说的，将向量排成矩阵便有矩阵Amxn，如果m<n则线性方程组有无穷多解

**定理：如果向量组中有一部分向量线性相关，则整个向量组线性相关**

例如，向量组**a1, a2, .. an**有向量**ai, aj**线性相关，即有等式

ki**ai** + kj**aj** = **0**

其中ki，kj不全为0，于是有

k1**a1** + k2**a2** ... + ki**ai** + kj**aj** + ... kn**an** = **0**

其中ki，kj不全为0，其余均为0，等式依然成立

**定理：向量组a1, a2, .. an线性相关的充分必要条件是，至少有一个向量ai是其余向量的线性组合**

示例，如下向量组

k1**a1** + k2**a2** + ... kn**an** = **0**

等式两边减去除k1**a1**外的其余向量，再除了k1

**a1** = (-k2/k1)**a2** + ... (-kn/k1)**an**

如果a1的分量不全为0，则k2 到 kn必然不全为0

**定理：有s个向量的向量组（A）和有t个向量的向量组（B），s<t，如果向量组（B）的向量可由向量组A线性表示，则向量组（B）线性相关**

即如下

k1a1 + k2a2 + ... ksas = bi (i = 1, 2 .. t)

那么有bi组成的向量组是线性相关

**向量中的秩**

**向量的极大无关组**

从**a1, a2, .. an**中选择r个向量，这r个向量组成的向量组线性无关，但再任意选择一个向量组成r+1个向量组，这个向量均向量相关，则我们称这r个向量为**a1, a2, .. an**的一个极大无关组

**定理：aj1, aj2, .. ajr是a1, a2, .. an的充分必要条件是a1, a2, .. an中的每一个向量均可由aj1, aj2, .. ajr线性表示（注：这里的jr表示的某一个数jr而不是两个j和r）**

**向量组的秩**

向量组**a1, a2, .. an**的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩，记为

r(**a1, a2, .. an**)

例如 r(**a1, a2, a3**) = 2

我们将矩阵A的列组成的向量组**a1, a2, .. an**，其秩称为A的**列秩**

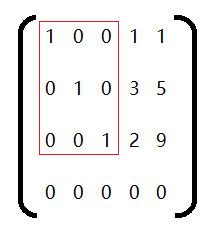
我们将矩阵A的行组成的向量组**a1, a2, .. an**，其秩称为A的**行秩**

**定理：矩阵A的秩r(A) = r的充分必要条件是矩阵A的列（或行）作为向量组r(a1, a2, .. an) = r**

**推论：矩阵的行秩与列秩相等**

**如何求向量组的极大无关组**

把矩阵通过初等变换化为如下形式梯形矩阵



1，2，3列组成矩阵A1的r(A1, **0**) = 3，所以其存在唯一解，即0解，所以其线性无关

1，2，3，4列组成的齐次线性方程组，r(A1, **0**) = 3 < 4，即其存在无穷解，所以线性相关

所以1，2，3列是矩阵的一个极大无关组

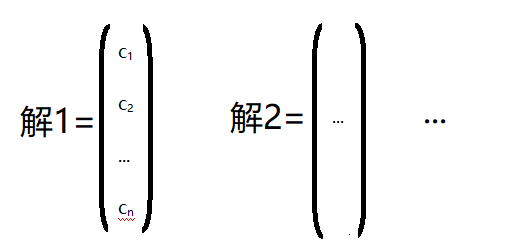
这里使用的增广矩阵的唯一解和无穷解的定理

**定理：如果向量组（A）与向量组（B）等价，那么2个向量组的秩相等**

**线性方程组解的结构**

**基础解系**

齐次线性方程组如果r(Amxn) < n，那么其将有无穷多解，我们将这些解组成向量组

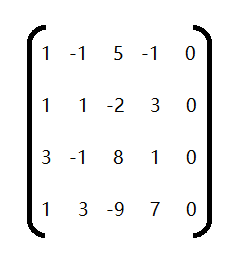


而该向量组的极大无关组，就是该齐次线性方程组的基础解系

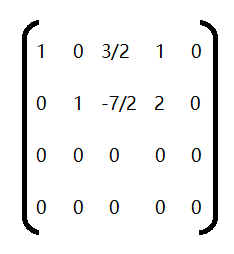
**定理：如果r(Amxn) < n，则矩阵A的存在基础解系，而基础解系的个数为n - r(Amxn)**

**求解基础解系**

如下，我们对如下的增广矩阵进行初等变换



得到



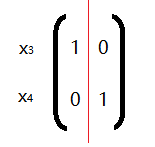
于是我们得到变换后的方程组

x1 = (-3/2)x3 + (-1)x4

x2 = (7/2)x3 + (-2)x4

该方程组的自由变量是x3和x4

我们将x3和x4分别取值(1, 0) 和 (0, 1)，即从2阶矩阵I中以列为向量，向量中的分量作为x3和x4的值



将这些值带入方程式，求出x1和x2

于是我们的到了2个解向量 (x1, x2, x3, x4)T

a = (-3/2, 7/2, 1, 0)T

b = (-1, -2, 0, 1)T

这2个解向量组成的向量组就是矩阵的基础解系

**方程组的全部解**我们可以使用如下表达式表示

c1(-3/2, 7/2, 1, 0)T + c2(-1, -2, 0, 1)T

c1，c2为任意数

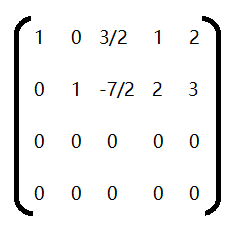
**导出组**

非齐次线性方程组 **Ax** = **b**，取 **b** = **0**，得到的齐次线性方程组称为该方程组的导出组

**非齐次线性方程组的全部解**

如果r(Amxn) < n，则方程组存在无穷多解，则方程组的全部解为当自由变量全为0的解向量加上方程组导出组的全部解

如下，我们将某个增广矩阵通过初等变换为如下形式



则我们可以得到方程组

x1 = 2 + (-3/2)x3 + (-1)x4

x2 = 3 + (7/2)x3 + (-2)x4

x3和x4分别取值(0, 0)，其解为 (2, 3, 0, 0)T

而方程组的导出组的全部解为

c1(-3/2, 7/2, 1, 0)T + c2(-1, -2, 0, 1)T

所以方程组的全部解为

(2, 3, 0, 0)T + c1(-3/2, 7/2, 1, 0)T + c2(-1, -2, 0, 1)T